**Outline**

참고 https://darkpgmr.tistory.com/category/%EC%98%81%EC%83%81%EC%B2%98%EB%A6%AC

**Homogeneous Coordinates** 동차 좌표계

각 항의 차수가 모두 같다(균일)

n차원의 사영 공간을 n+1개의 좌표로 나타내는 좌표계

임의의 0이 아닌 상수 w에 대해 (x, y)를 (wx, wy, w)로 표현

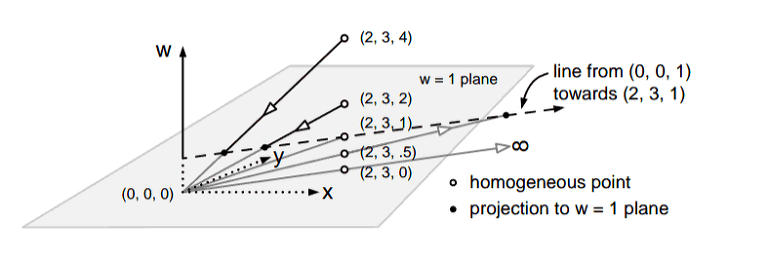
3D : (X, Y, Z) → (wX, wY, wZ, w)로 표현 Inverse : (x, y, α) → →

scale 무시되고, (x, y)에 대한 homogeneous 좌표 표현은 무한히 존재 (단 한 점으로 변환되지 X)

무한대(infinity) 개념 활용 가능 → 커브와 곡면 표현 → Graphics / 3D vision에서 활용

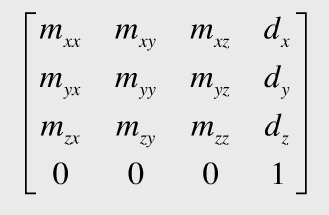
한 점 (x, y) → 동차 좌표 (x/w, y/w, 1/w)로 표현, w가 0이 되면 무한대

(x, y, 0)은 (x, y) 방향의 무한대 → 유한 좌표로 표현 가능



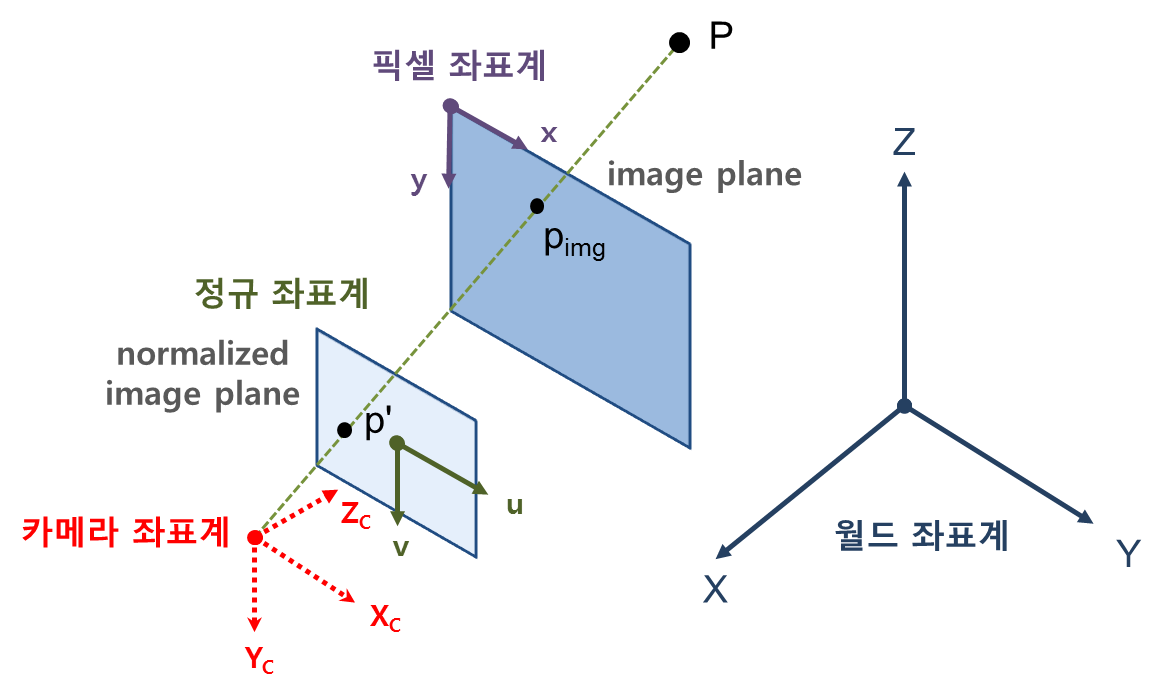
w = 0 인 경우 그 점은 사실 위치가 없는 벡터로 취급할 수 있다.

Affine 변환이나 Perspective(projective) 변환을 하나의 Single Matrix (단일 행렬)로 표현할 수 있다.

 3x3 변환 행렬과 이동 벡터 d를 동차 표현 = 4x4 정방행렬

Euclidean Geometry – 데카르트(직각) 좌표계(Cartesian coordinate system)

Projective Geometry – Homogeneous (projective) coordinate system



실제 픽셀 이미지가 아닌 가상의 정규 이미지 평면을 사용하는 이유

: 기하학적 해석은 카메라 파라미터가 제거된 정규 이미지 평면에서 하는 것이 용이

카메라 세팅에 따라 서로 다른 영상을 얻게 됨

이러한 카메라 간의 차이는 어떤 일관된 기하학적인 해석을 하는 데에 있어서 불필요한 요소

정규 이미지 평면상의 한 점 p’ = (u, v)의 homogeneous 좌표 표현 : (u, v, 1)

점 p’의 카메라 좌표계 입장에서도 3D 좌표로 (u, v, 1)

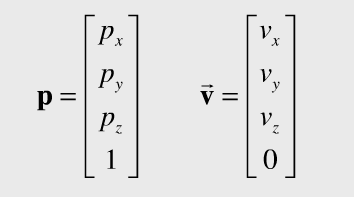
카메라 좌표계 입장에서 투영선 상의 있는 점들은 3D 좌표로 w(u, v, 1) = (wu, wv, w)

= (u, v)의 homogeneous 좌표 표현과 동일

homogeneous 좌표 (x, y, z)에서 (x/z, y/z)를 구하는 것은 projection

(u, v)를 homogeneous 좌표 (wu, wv, w)로 표현하는 것은 inverse projection

직교 좌표 → 동차 좌표 변환 : 점에 대해서는 1, 벡터에 대해서는 0 추가



**2. Projective Geometry and Transformations of 2D**

projective geometry 사영 기하학

: 길이(length), 각도(angle), 평행선(parallelism) 보존 X / type (직선, 곡선…) 보존

유클리디안 기하학에서 평행선은 결코 만나지 않는다.

사형 기하학에서는 평행한 두 선의 교점 = vanishing point

Projective transformation

평면이 카메라로 이미징 될 때 발생하는 기하학적 왜곡을 모델링

**2.1 Planar geometry**

유클리디안 – 데카르트 좌표

기하학 – 대수학 관점에서 접근 → 알고리즘 및 실제 계산 방법 유도에 용이

점 → 좌표 기반의 벡터 / 선 → 벡터 / 원뿔(이차) 곡선 → 대칭 행렬 symmetric matrix

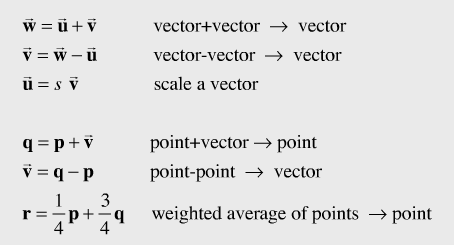
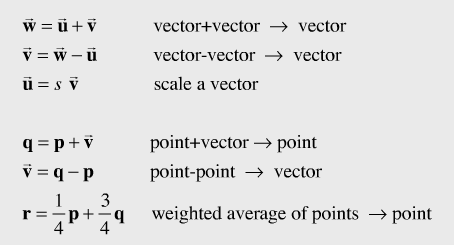
**2.2 The 2D projective plane**

에서 한 점은 좌표쌍 (x, y)로 표현된다.

를 벡터 공간으로 생각하면 좌표쌍 (x, y)은 벡터이며, 점은 벡터로 표현된다.

point : 공간의 어떤 위치를 표현 점들을 빼서 벡터를 만들 수 있다.

vector : 공간에서의 이동(displacement) 크기와 방향을 가진다.



**Row and Column Vector**

선형 변환

column vector

row vector

A \* =

maxtrix \* vector = vector

**2.2.1 Points and Lines**

**Homogeneous representation of lines**

· line: → vector 로 표현

· 0이 아닌 상수 k → 과 은 같은 선 (일대일 대응 x)

· 와 → equivalent 등가

· The equivalence class → homogeneous vectors

· 은 어떤 선도 표현하지 못한다

· The set of homogeneous vectors 의 form

equivalence class 동치류

P가 3차원에서 정의된 일반적인 평면이라면 p와 등거리(같은 거리)에 있는 점들의 집합

**Homogeneous representation of points**

인 경우, 점 은 선 위에 놓인다.

벡터의 내적으로 표현 4hkor (x, y, 1)ass x2)planenityinityD

· 이고 이면

· , → homogeneous representation of the 2D point

· 임의의 homogeneous vector → 의 점 /, /, 의 elements

**Result 점과 선은 수직 관계**

· 일 때 점 x는 선 위에 있다. 내적 = 0 → 수직

· 두 개의 직선 과 의 교차점은 ｘ 외적 → 법선 벡터 (수직)

· 두 개의 점 와 을 지나는 직선은 ｘ 직선 은 점 와 에 모두 수직

**Degree of freedom (dof)**

그 시스템이 독립적으로 변할 수 있는 변수의 개수

Degrees of freedom = (Sum of freedoms of the points) − (Number of independent constraints)

몇 개의 변수를 고정해야 해를 구할 수 있는지 나타내는 수

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 식 | System의 변수 | 독립적인 식의 개수 | 해 | 자유도 |
| x=1 | 1 (x) | 1 | 1 | 0 |
| x+y=2 | 2 (x, y) | 1 | ∞ | 1 |
| x+y=2, x=1 | 2 (x, y) | 2 | 1 | 0 |
| x+y+z=3 | 3 (x, y, z) | 1 | ∞ | 2 |

**2.2.2 Ideal points and the line at infinity**

**Intersection of parallel lines**

⇒ ⇒



(c’-c) : scale → ignore : point ⇒

직교 좌표계에서 를 표현할 수 없으므로 (0으로 나눌 수 없으니까)

동차 좌표계에서 를 사용해서 무한의 위치를 표현

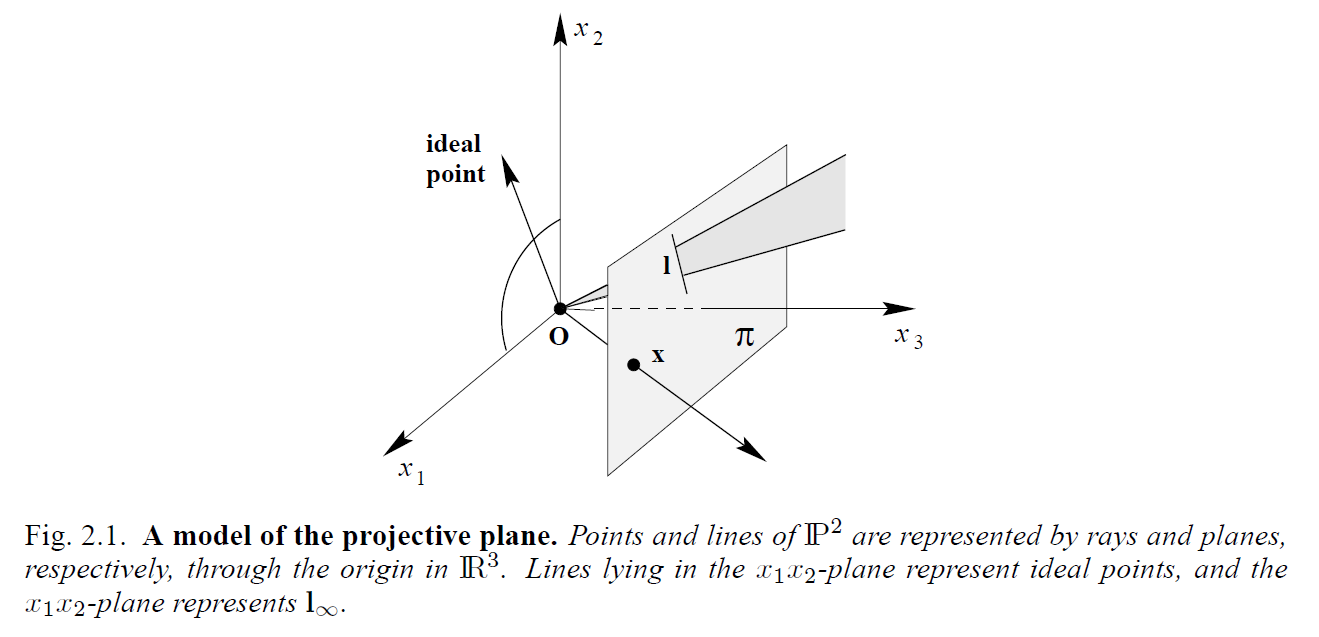
**Ideal points and the line at infinity**

homogeneous vectors

ideal point = ⇒ line at infinity 위에 놓여있다.

⇒ intersection ⇒ ideal point

**A model for the projective plane**



2개의 선은 하나의 평면 위에 놓이고 2개의 평면은 하나의 선에서 교차

⇒ 2개의 점은 하나의 직선 위에 놓이고, 2개의 직선은 하나의 점에서 교차

선과 평면을 평면과 교차시켜 점과 선 구할 수 있다.

**Duality**

: interchangeable 교환 가능

⇒에서 point와 line 교환 가능

: 점 가 선 위에 놓여있다 ⇔ 점 이 선 위에 놓여있다

: 점 가 선 과 ’ 위에 놓여있다 ⇔ 선 가 점과 위에 놓여있다

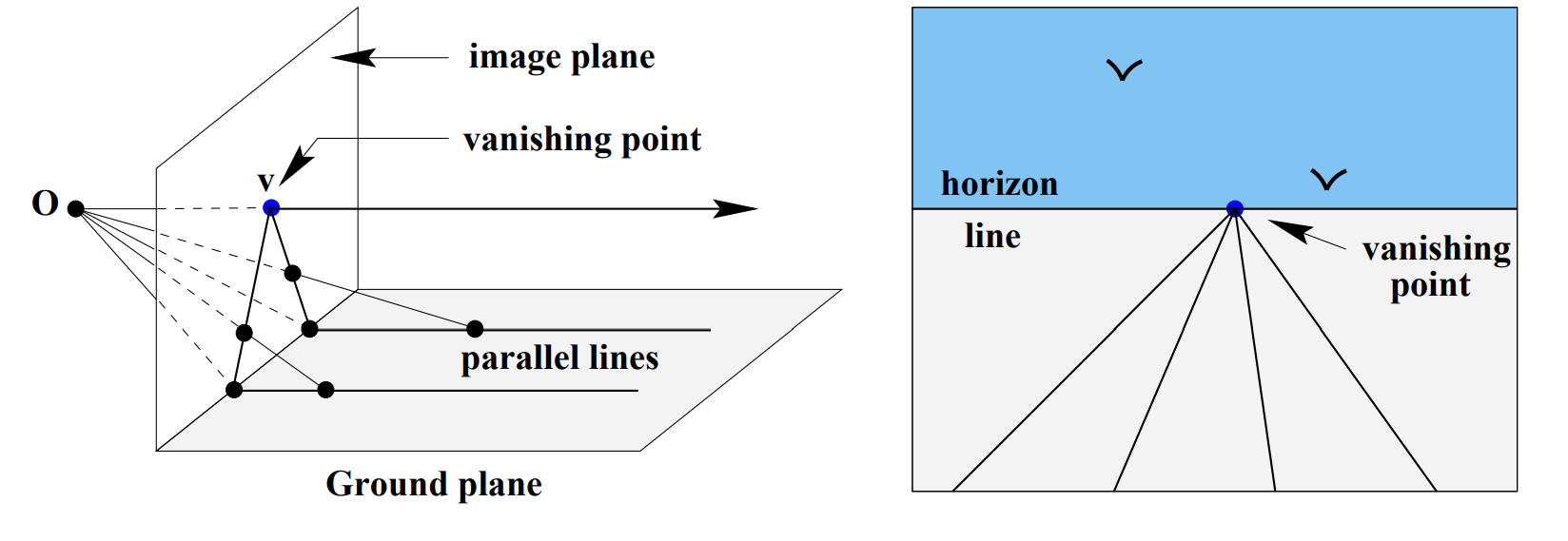
|  |  |
| --- | --- |
| 직교 좌표 → 동차 좌표 |  |
| (x, y, z) → (wx, wy, wz, w) |  |
| 동차 좌표 → 직교 좌표 | : 동차 좌표계 위의 한 직선에 있는 모든 점을  w=1인 평면의 한 점으로 mapping |
| (x, y, z, w) → (x/w, y/w, z/w) |

두 평행선의 교차점을 표현하기 위해 동차 좌표계 사용 --- 무한의 위치 표현

Ax + By + C = 0 Ax + By + D = 0 C≠D ⇒ 평행, 교차 X

↓ 직교 () = (, ) → 동차 (X, Y, W)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A + B + C = 0 | AX + BY + CW = 0 | (X, Y, 0)에서 교차 |
| A + B + D = 0 | AX + BY + DW = 0 | W = 0인 좌표 : ideal point |
|  | 차수가 같은 방정식 | ideal point들이 이루는 선 : line at infinity |



유클리드 공간에서 W=0인 점들을 나타낼 수 X

⇒ 이 되는 순간 직교 좌표계에서 점의 위치는 (∞, ∞)

동차 좌표계에서 으로 직교 좌표계에서의 무한의 위치를 표현할 수 있다.

점과 선은 서로 수직

평행한 두 직선은 무한원점 point at infinity (ideal point)에서 만난다 = Vanishing Point

ideal point들이 모여 line at infinity를 형성 = horizon 지평선을 이룬다.